Physik 2, Probeklausur SS12, M. Pieper

chris@university-material.de

Ich erhebe keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit. Falls ihr Fehler findet oder etwas fehlt, dann meldet euch bitte über den Emailkontakt.

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1

1.1 a)

Wir suchen uns zuerst einen Punkt aus um den wir taylorn wollen. Wir wählen hier den Punkt $x = 1$. Um die Taylorreihe aufstellen zu können, müssen wir in diesem Fall die ersten beiden Ableitungen bestimmen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

Daraus können wir nun die Taylorreihe in unserem Punkt aufstellen:

$$
\begin{aligned}
T(1) &= \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1) - \frac{1^{-\frac{3}{2}}}{8}(x-1)^2 \\
&= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2
\end{aligned}
$$

In diese Formel setzen wir nun den Punkt ein an dem wir die Steigung erfahren wollen. In unserem Fall $x = 3$

$$T(3) = 1.5$$

1.2 b)

Wir linearisieren zunächst in beide Richtungen indem wir den Gradienten bilden:

$$\triangledown f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix}$$

Wenn wir nun den Punkt $(0, 0)$ einsetzen erhalten wir:

$$\triangledown f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2 Aufgabe 2

2.1 a)

Es handelt sich um eine lineare, homogene DGL 1. Ordnung!

2.2 b)

Wir verwenden zur Lösungen das Separationsverfahren:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{y(x)}{2\sqrt{x}} \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y(x)}{2\sqrt{x}} \\
\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y(x)} &= \int \frac{y(x)}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow \ln(y(x)) &= \sqrt{x} + c \\
\Leftrightarrow y(x) &= c \cdot e^{\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

3 Aufgabe 3

Wir betrachten zunächst die homogene DGL:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= 2y(x) \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2y(x) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2y}\,\mathrm{d}y &= 1\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{2} &= x + c \\
\Leftrightarrow y &= c \cdot e^{2x}
\end{aligned}
$$

Wir nehmen den Ansatz aus der Papulatabelle. Dabei ist 2 keinen Lösung der characteristischen Gleichung, da $e^1 \neq e^{2\cdot 1}$:

$$
\begin{aligned}
y_p &= Ae^x \\
\Rightarrow e^x &= Ae^x - 2\left(Ae^x\right) \\
\Leftrightarrow A &= -1
\end{aligned}
$$

Das heißt unsere Funktion ist:

$$
y(x) = -e^{cx}
$$

4 Aufgabe 4

4.1 a)

Wir lösen zunächst die homogene DGL mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$:

$$
\begin{aligned}
0 &= 2y''(x) + 4y'(x) + 2(y) \\
\Leftrightarrow 0 &= \lambda^2 + 2\lambda + 1
\end{aligned}
$$

Wir wenden die pq-Formel an:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 1} \\
\Rightarrow \lambda_{1,2} &= -1
\end{aligned}
$$

Unsere Lösung ist also $y(x) = e^{-x}$.

4.2 b)

Ich glaube es war sogar ein Satz aus der Vorlesung, das e-Funktionen nicht l.a. sind, wenn sich sich um einen variablen Faktor unterscheiden. Aber verwenden wir das formale Kriterium:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot xe^x &= 0 \\ \Leftrightarrow c_1 + c_2 \cdot x &= 0 \\ \Leftrightarrow -c_2 \cdot x &= c_1 \end{aligned}$$

Wir sehen, das es keine andere Möglichkeit gibt, außer das die beiden Konstanten $c_1 = c_2 = 0$ sind. Damit ist gezeigt, das die beiden Funktionen linear unabhängig sind.

5 Aufgabe 5

Wir bestimmen zunächst alle relevanten Ableitungen um damit die Hessematrix aufzustellen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x_1^2 - 2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x_2 + 1 & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = 3x_1^2 - 2 \\ x^2 &= \frac{1}{3} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

und nun in x_2-Richtung, wobei das hier eigentlich unnötig ist, da wir keinen x_2 Eintrag in der Hessematrix haben:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = 2x_2 + 1 \\ x_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jetzt stellen wir die Hessematrix auf. Das geht nach folgendem Schema:

$$\begin{aligned} H_f(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir unsere Nullstellen in die Hessematrix ein:

$$H_f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alle Einträge auf der Diagonalen sind positiv und die Matrix damit positiv definit. Am Punkt $\left(\sqrt{\frac{1}{3}} / -\frac{1}{2}\right)$ befindet sich also ein Minumum.

$$H_f\left(\sqrt{-\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hier haben wir positive und negative Einträge auf der Hauptdiagonalen und damit ist die Matrix indefinit. Am Punkt $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} / -\frac{1}{2}\right)$ befindet sich also ein Sattelpunkt.

6 Aufgabe 6

Eine zweidimensionale Integration ist nichts anderes als zwei nacheinander ausgeführte einfache Integration.

Wir müssen uns zunächst aber über die Integrationsgrenzen klarwerden. Da wir über eine Kreisfläche integrieren, gilt $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, daraus können wir Grenzen für die Integration nach x_1 und nach x_2 gewinnen. Für die Integration nach x_1 erhalten wir die untere Grenze $\sqrt{\frac{2}{2} - x_2^2}$ und als obere $\sqrt{r_1^2 - x_2^2}$. Bei der Integration nach x_2 ist es äquivalent; untere Grenze ist $\sqrt{r_2^2} = r_2$ und die obere $\sqrt{r_1^2} = r_1$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\pi r_1^2 - \pi r_2^2} \int_1^2 \int_{\sqrt{1-x_2^2}}^{\sqrt{4-x_2^2}} x_1 + x_2 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{1}{3\pi} \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x_1^2 + x_2\right]_{\sqrt{1-x_2^2}}^{\sqrt{4-x_2^2}} \mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{1}{3\pi} \int_1^2 \frac{1}{2}\left(4 - x_2^2\right) + x_2 - \frac{1}{2}\left(1 - x_2^2\right) - x_2 \, \mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{1}{3\pi} \int_1^2 1.5 \, \mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{1}{3\pi} \left[1.5 x_2\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

Das ist unsere Mittlere Temperatur.