Physik 2, Probeklausur SS13, M. Pieper

chris@university-material.de

Ich erhebe keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit. Falls ihr Fehler findet oder etwas fehlt, dann meldet euch bitte über den Emailkontakt.

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1

Wir suchen uns zuerst einen Punkt aus um den wir taylorn wollen. Wir wählen hier den Punkt $x = 1$. Um die Taylorreihe aufstellen zu können, müssen wir in diesem Fall die ersten beiden Ableitungen bestimmen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Daraus können wir nun die Taylorreihe in unserem Punkt aufstellen:

$$\begin{aligned} T(1) &= \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1) - \frac{1^{-\frac{3}{2}}}{8}(x-1)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 \end{aligned}$$

In diese Formel setzen wir nun den Punkt ein an dem wir die Steigung erfahren wollen. In unserem Fall $x = 3$

$$T(3) = 1.5$$

2 Aufgabe 2

2.1 a)

Die DGL ist eine homogene, lineare DGL erster Ordnung.

2.2 b)

Wir verwenden das Verfahren der Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y(x)}{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y(x)}{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \ln(y) &= \sqrt{x} \\ \Leftrightarrow y &= c \cdot e^{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

3 Aufgabe 3

3.1 a)

Da wir nur die allgemeine Lösung bestimmen sollen, lassen wir den Sinusterm weg und finden die Lösung für:

$$
\begin{aligned}
0 &= 2y''(x) + 4y'(x) + 2y(x) \\
\Leftrightarrow 0 &= \lambda^2 + 2\lambda + 1
\end{aligned}
$$

Wir wenden die pq-Formel an:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 1} \\
\Rightarrow \lambda_{1,2} &= -1
\end{aligned}
$$

Unsere Lösung ist also $y(x) = e^{-\lambda} + c$.

3.2 b)

Hierzu nutzen wir die Wronskideterminante:

$$
\begin{aligned}
W(y_1, y_2) &= \det\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{pmatrix} \\
&= e^x \cdot (xe^x + e^x) - e^x \cdot xe^x
\end{aligned}
$$

Das ist offensichtlich für ein $x \in \mathbb{R} \neq 0$. Damit sind die Funktionen linear unabhängig.

4 Aufgabe 4

Wir bestimmen zunächst die nötigen Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= 3x_1^2 - 2 \qquad & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= 6x_1 \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= 2x_2 + 1 \qquad & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= 2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} &= 0
\end{aligned}
$$

Nun bestimmen wir mit den Nullstellen der ersten Ableitungen unsere Extremstellen:

$$
\begin{aligned}
0 &= 3x_1^2 - 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\
0 &= 2x_2 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Jetzt bauen wir uns die Hessematrix und bestimmen darüber die Art der Extremstellen:

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass sowohl der obere rechte Eintrag als auch die Determinante > 0 sind. Damit befindet sich am Punkt $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ ein Minumum.

$$H_f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass die Determinante hier < 0 ist. Also befindet sich am Punkt $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ ein Sattelpunkt.

5 Aufgabe 5

Da wir bis zur zweiten Ordnung taylorn sollen, müssen wir alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung machen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1} = 0$$

Nun müssen wir die Taylorformel im mehrdimensionalen aufstellen:

$$T(x) = 3(x_1 - 1) - 2x_2 + \frac{1}{2} \cdot 6(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x_2^2$$

6 Aufgabe 6

Wir verwenden in dieser Aufgabe logischerweise Zylinderkoordinaten. Damit können wir die Dreifachintegration so aufstellen:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \left((r\cos(\phi))^2 + (r\sin(\phi))^2\right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}h \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}h = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}h \\ &= \int_0^h \frac{1}{2}\pi \, \mathrm{d}h \\ &= \left[\frac{1}{2}\pi\right]_0^2 \\ &= \pi \end{aligned}$$